УДК 532.591
DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-5

К. Ю. Басинский

ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование процесса образования волн при обтекании потоком идеальной жидкости бесконечной глубины кругового цилиндра, находящегося под поверхностью жидкости.

Материалы и методы. Для решения задачи действие цилиндра заменено действием диполя, который заменял бы собой цилиндр при его обтекании неограниченным потоком. Применен метод теории возмущений – метод малого параметра. Разложением неизвестных функций в ряды по степеням малого параметра исходная задача разбита на задачи по порядку малости.

Результаты. С точностью второго приближения получены выражения для потенциала скорости жидкости и ординаты свободной поверхности.

Выводы. Исследовано влияние различных параметров задачи на форму свободной поверхности жидкости.

Ключевые слова: поток идеальной жидкости, обтекание цилиндра, метод последовательных приближений, поверхностные волны.

K. Yu. Basinskiy

OCCURRENCE OF WAVES ON THE SURFACE OF FLUID FLOWING IN A CIRCULAR CYLINDER

Abstract.

Background. The aim of the work is to study the process of formation of waves of ideal fluid of infinite depth flowing around a circular cylinder located below a liquid surface.

Materials and methods. To solve the problem the action of a cylinder was replaced by the action of a dipole, which would replace a cylinder with its unlimited flow stream. The author applied a method of the perturbation theory - the small parameter method. By the decomposition of unknown functions in powers of the small parameter the initial task was broken down into tasks in the order of smallness.

Results. With the accurace of the second approximation the author obtained expressions for the potential velocity of liquid and the ordinates of free surface.

Conclusions. The researcher has studied the effect of various parameters of the problem on the form of free surface of the liquid.

Key words: ideal fluid flow, flowing around a cylinder, method of successive approximations, surface waves.

Введение

Решение задачи об образовании волн при обтекании кругового цилиндра, находящегося под поверхностью жидкости, обычно находится либо для волн малой амплитуды [1–3], когда условия на поверхности жидкости сводятся к линейным в предположении, что скорость потока значительно превосходит скорость возмущения жидкости, либо с применением численных методов [4–6]. При аналитическом решении нелинейных задач о поверхностных волнах как правило используется метод малого параметра, подробное описание которого можно найти, например, в [2, 7]. Однако рассматриваемые при этом задачи обычно отличаются параметрами среды, а влияние на волновое движение погруженных в жидкость тел не исследуется. В данной работе метод малого параметра применяется для решения нелинейной задачи об образовании волн, вызванном обтеканием кругового цилиндра потоком идеальной жидкости.

1. Задача об обтекании цилиндра

Пусть под поверхностью идеальной жидкости бесконечной глубины расположен цилиндр радиуса a, на который набегает поток жидкости со скоростью c (рис. 1). Введем систему координат так, что ось Ox совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, а ось Oy направлена вертикально вверх. Центр цилиндра находится в точке $(0, -h)$, а его образующие перпендикулярны плоскости Oxy. Предположим, что движение жидкости потенциально. Кроме того, в силу постановки задачи движение является установившимся. Тогда компоненты вектора скорости возмущенного движения жидкости можно представить в виде

$$u = c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где функция $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости возмущения основного потока, который удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$.

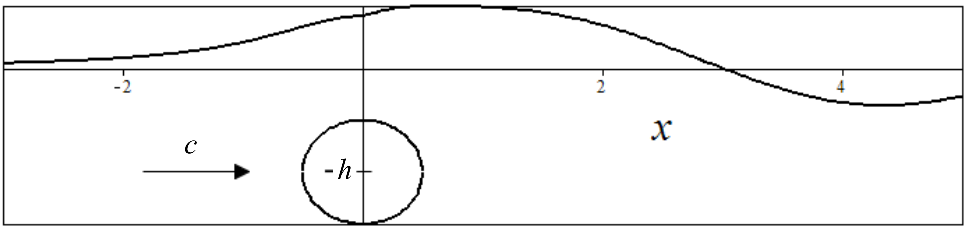

Рис. 1. Геометрия задачи

На свободной поверхности должно выполняться кинематическое условие, которое для случая плоских установившихся волн запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(c + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{d\xi}{dx}, \quad y = \xi, \tag{1}$$

здесь $\xi(x)$ – ордината свободной поверхности.

Также вдоль свободной поверхности давление p сохраняет постоянное значение, равное значению атмосферного давления:

$$p = p_a, \quad y = \xi.$$

Тогда для точек свободной поверхности интеграл Бернулли запишется в виде

$$\frac{1}{2}\left[\left(c+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]+g\xi=\text{const},\quad y=\xi. \tag{2}$$

Исключим из условий (1) и (2) функцию ξ, продифференцировав второе условие по переменной x и подставив в него вместо производной функции ξ ее выражение из первого условия. Получим

$$\left(c+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(c+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad y=\xi. \tag{3}$$

На поверхности цилиндра должна равняться нулю нормальная производная потенциала скорости:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

При заглублении обе составляющих возмущения скорости должны стремиться к нулю:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad y\to-\infty.$$

2. Линейная задача

Применение метода последовательных приближений требует введения малого параметра, значение которого определяется характеристиками волнового движения. В данной задаче его величину можно задать, исходя из условия малости скорости возмущения относительно скорости потока c. Для этого потребуется сначала решить задачу в линейном приближении, когда условия (1) и (3) принимают вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=c\frac{d\xi}{dx},\quad c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad y=0. \tag{4}$$

Действие цилиндра заменим действием диполя, который заменял бы собой цилиндр при его обтекании неограниченным потоком [2]. Из этого допущения следует, что вблизи центра цилиндра потенциал φ должен принимать следующий вид [8]:

$$\varphi\approx\frac{a^2cx}{x^2+(y+h)^2}.$$

Поэтому функцию φ представим в следующем виде:

$$\varphi(x,y)=\Phi(x,y)+\frac{a^2cx}{x^2+(y+h)^2}-\frac{a^2cx}{x^2+(y-h)^2}. \tag{5}$$

Здесь функция $\Phi(x,y)$ является потенциальной и удовлетворяет согласно второму условию (4) следующему граничному условию:

$$c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{4ca^2ghx}{\left(x^2+h^2\right)^2},\quad y=0. \tag{6}$$

Функцию $\Phi(x,y)$ будем искать в следующем виде:

$$\Phi=\int_0^\infty Ae^{ky}\sin kxdk, \tag{7}$$

соответствующем установившимся волновым движениям. При этом условие затухания волнового движения при заглублении в выражении (7) уже учтено. Подставляя этот вид функции Φ в условие (6), получим равенство для определения функции A:

$$\int_0^\infty A\left(k-\frac{g}{c^2}\right)k\sin kxdk=-\frac{4a^2ghx}{c\left(x^2+h^2\right)^2}.$$

Применим к этому равенству обратное преобразование Фурье:

$$A\left(k-\frac{g}{c^2}\right)k=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{4a^2ghx}{c\left(x^2+h^2\right)^2}\sin kxdx=\frac{2ka^2g}{c}e^{-kh}.$$

Отсюда получается выражение для функции A:

$$A=\frac{2ca^2g}{(g-ck)}e^{-kh},$$

подстановка которого в интеграл (7) позволяет определить выражение для потенциала Φ:

$$\Phi=2ca^2g\int_0^\infty e^{k(y-h)}\frac{\sin kx}{(g-ck)}dk=-\frac{4\pi a^2g}{c}e^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2}. \tag{8}$$

Тогда выражение для искомой функции φ согласно (5) принимает вид

$$\varphi=-\frac{4\pi a^2g}{c}e^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2}+\frac{a^2cx}{x^2+(y+h)^2}-\frac{a^2cx}{x^2+(y-h)^2}.$$

Подставив его в первое условие (4), получим выражение для формы ординаты свободной поверхности далеко за обтекаемым цилиндром:

$$\xi=-\frac{4\pi a^2g}{c}e^{-\frac{gh}{c^2}}\sin\frac{gx}{c^2}+\frac{2a^2h}{x^2+h^2}, \tag{9}$$

которое совпадает с полученным в [2].

3. Метод малого параметра

Для приближенного решения исходной нелинейной задачи воспользуемся методом малого параметра. Малый параметр выберем, исходя из предположения малости скорости возмущения жидкости относительно скорости потока, т.е. малости отношения

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}{c}.$$

Далеко за обтекаемым цилиндром выполняется приближенное соотношение

$$\frac{\max\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}{c}\approx\frac{4\pi a^2g^2}{c^4}.$$

Поэтому в качестве малого параметра выберем величину

$$\varepsilon=\frac{a^2g^2}{c^4}. \qquad (10)$$

Тогда выражение (5) для функции φ запишется в виде

$$\varphi(x,y)=\Phi(x,y)+\frac{\varepsilon c^5}{g^2}\left[\frac{x}{x^2+(y+h)^2}-\frac{x}{x^2+(y-h)^2}\right]. \qquad (11)$$

Неизвестные функции Φ и ξ будем искать в виде степенных рядов по малому параметру ε:

$$\Phi=\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2+\varepsilon^3\Phi_3+\ldots, \qquad (12)$$

$$\xi=\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+\varepsilon^3\xi_3+\ldots$$

Сведя условия (1) и (3) разложением в ряд Маклорена входящих в них функций к условиям на фиксированной поверхности $y=0$ [2, 7] и подставив выражение (11) и ряды (12) в уравнение и граничные условия, можно выписать задачи первого и второго порядка малости по параметру ε.

Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Phi_1=0,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=c\frac{d\xi_1}{dx}+\frac{4c^5hx}{g^2\left(x^2+h^2\right)^2},\quad c^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+g\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=\frac{4c^5hx}{g\left(x^2+h^2\right)^2},\quad y=0,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=0,\quad y\to-\infty.$$

Для второго порядка малости задача примет следующий вид:

$$\Delta\Phi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = c\frac{d\xi_2}{dx} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\xi_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{d\xi_1}{dx}, \quad y = 0, \tag{13}$$

$$c^2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + g\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = -\xi_1\frac{\partial}{\partial y}\left(c^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right) - 2c\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} -$$

$$-c\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} + \frac{4c^6hx}{g^2\left(x^2+h^2\right)^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} + \frac{4c^6h\left(h^2-3x^2\right)}{g^2\left(x^2+h^2\right)^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} +$$

$$+\frac{48c^7hx\left(x^2-h^2\right)}{g^2\left(x^2+h^2\right)^4}\xi_1 + \frac{16c^{11}h^2x\left(3x^2-h^2\right)}{g^4\left(x^2+h^2\right)^5}\xi_1, \; y = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0, \quad y \to -\infty.$$

Задача первого порядка малости решена выше, и функции Φ_1 и ξ_1 согласно выражениям (8), (9) и (10) запишутся в виде

$$\Phi_1 = -\frac{4\pi c^3}{g}e^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2}, \quad \xi_1 = -\frac{4\pi c}{g}e^{-\frac{gh}{c^2}}\sin\frac{gx}{c^2} + \frac{2c^4h}{g^2\left(x^2+h^2\right)}. \tag{15}$$

Подставив выражения (15) в условия (13) и (14), получим задачу для определения неизвестных функций Φ_2 и ξ_2, которая решается аналогично линейной задаче, вследствие чего ее решение здесь опускается.

Функции Φ_2 и ξ_2 определяются в виде

$$\Phi_2 = -\frac{4\pi c^3}{g}e^{\frac{2g}{c^2}(y-h)}\sin\frac{2gx}{c^2} + Be^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2},$$

$$\xi_2 = \frac{4\pi c}{g}(c-2\pi)e^{-\frac{2gh}{c^2}}\cos\frac{2gx}{c^2} +$$

$$+\left(B - \frac{8\pi c^4h}{g^2\left(x^2+h^2\right)}\right)e^{-\frac{gh}{c^2}}\sin\frac{gx}{c^2} + \frac{8\pi^2c}{g}e^{-\frac{2gh}{c^2}},$$

где

$$B = \frac{2c^9\pi}{3g^4h^3}\left[3 + 3\frac{gh}{c^2} + 3\left(\frac{gh}{c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{gh}{c^2}\right)^3\right] + \frac{32c^3}{g}\left\{\frac{2\pi g}{c^2h} - \frac{c^2}{gh} +\right.$$

$$+\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left[e^{-\frac{2gh}{c^2}}Ei\left(\frac{2gh}{c^2}\right)-e^{\frac{2gh}{c^2}}Ei\left(-\frac{2gh}{c^2}\right)\right]\Bigg\}.$$

Здесь $Ei(z)$ – интегральная показательная функция [9].

Собирая вместе решения задач первого и второго порядка малости, получим приближенное решение исходной задачи:

$$\phi=-\varepsilon\frac{4\pi c^3}{g}e^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2}+\varepsilon\frac{c^5}{g^2}\left(\frac{x}{x^2+(y+h)^2}-\frac{x}{x^2+(y-h)^2}\right)+$$

$$+\varepsilon^2\left(-\frac{4\pi c^3}{g}e^{\frac{2g}{c^2}(y-h)}\sin\frac{2gx}{c^2}+Be^{\frac{g}{c^2}(y-h)}\cos\frac{gx}{c^2}\right),$$

$$\xi=\varepsilon\left(-\frac{4\pi c}{g}e^{-\frac{gh}{c^2}}\sin\frac{gx}{c^2}+\frac{2c^4h}{g^2\left(x^2+h^2\right)}\right)+\varepsilon^2\left[\frac{4\pi c}{g}(c-2\pi)e^{-\frac{2gh}{c^2}}\cos\frac{2gx}{c^2}+\right.$$

$$\left.+\left(B-\frac{8\pi c^4h}{g^2\left(x^2+h^2\right)}\right)e^{-\frac{gh}{c^2}}\sin\frac{gx}{c^2}+\frac{8\pi^2c}{g}e^{-\frac{2gh}{c^2}}\right],$$

Для иллюстрации на рис. 2–4 приведены графики формы свободной поверхности при различных значениях радиуса цилиндра (рис. 2), скорости набегающего потока (рис. 3) и глубине расположения цилиндра (рис. 4).

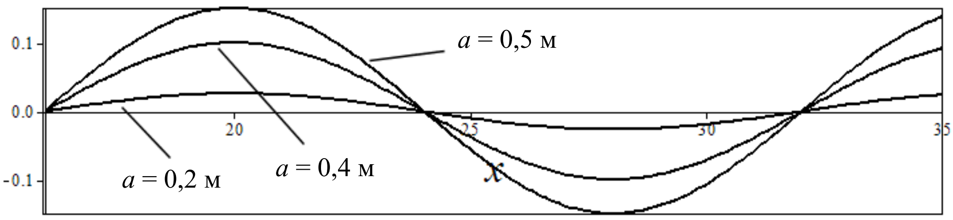

Рис. 2. Форма свободной поверхности при разном радиусе цилиндра (c = 5 м/с, h = 1 м)

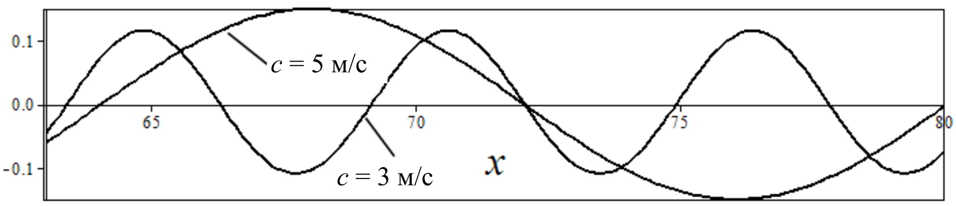

Рис. 3. Форма свободной поверхности при разной скорости потока (a = 0,5 м, h = 1 м)

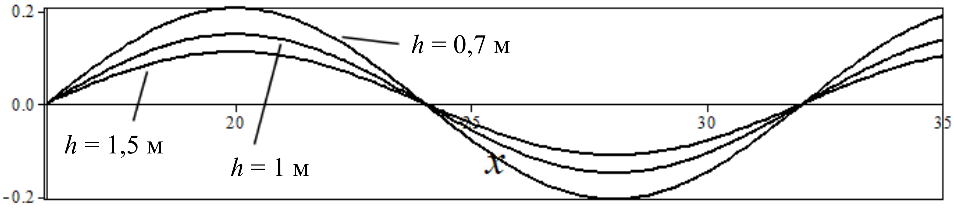

Рис. 4. Форма свободной поверхности при разной глубине расположения цилиндра (c = 5 м/с, a = 0,5 м)

Из рис. 2–4 видно, что увеличение радиуса цилиндра приводит к возрастанию амплитуды волны. Большей скорости потока соответствуют волны большей длины. Возрастание глубины расположения цилиндра приводит в волновым возмущениям меньшей амплитуды.

Заключение

Таким образом, методом малого параметра получено решение задачи об образовании волн при обтекании кругового цилиндра потоком идеальной жидкости. Проиллюстрировано влияние различных параметров задачи на форму свободной поверхности жидкости.

Список литературы

1. **Елизаров, А. М.** Капиллярно-гравитационные волны при циркуляционном обтекании подводного цилиндра в канале конечной глубины / А. М. Елизаров, К. В. Кириллин, С. И. Филиппов // Ученые записки Казанского университета. Сер.: Физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, № 1. – С. 147–154.
2. **Сретенский, Л. Н.** Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. – М. : Наука, 1977. – 816 с.
3. **Хаскинд, М. Д.** О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины / М. Д. Хаскинд // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67–78.
4. **Стурова, И. В.** Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн / И. В. Стурова. – Красноярк, 1990. – 48 с. – (Препринт № 5 / ВЦ СО АН СССР).
5. **Терентьев, А. Г.** Численные методы в гидродинамике / А. Г. Терентьев, К. Е. Афанасьев. – Чебоксары : Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1987. – 94 с.
6. **Romate, J. E.** The numerical simulation of nonlinear gravity waves / J. E. Romate // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1990. – Vol. 7, № 4. – P. 152–166.
7. **Алешков, Ю. З.** Теория волн на поверхности тяжелой жидкости / Ю. З. Алешков. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 196 с.
8. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Физматгиз, 1963. – Ч. 1. – 584 с.
9. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

References

1. Elizarov A. M., Kirillin K. V., Filippov S. I. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences]. 2011, vol. 153, no. 1, pp. 147–154.

2. Sretenskiy L. N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [The theory of wave motion of fluid]. Moscow: Nauka, 1977, 816 p.
3. Khaskind M. D. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1945, vol. 9, no. 1, pp. 67–78.
4. Sturova I. V. *Chislennye raschety v zadachakh generatsii ploskikh poverkhnostnykh voln* [Numerical calculations in problems of flat surface waves generation]. Krasnoyark, 1990, 48 p. (Preprint № 5 / VTs SO AN SSSR).
5. Terent'ev A. G., Afanas'ev K. E. *Chislennye metody v gidrodinamike* [Numerical methods in hydrodynamics]. Cheboksary: Izd-vo Chuvashskogo gos. un-ta, 1987, 94 p.
6. Romate J. E. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1990, vol. 7, no. 4, pp. 152–166.
7. Aleshkov Yu. Z. *Teoriya voln na poverkhnosti tyazheloy zhidkosti* [The theory of waves on the gravity solution's surface]. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta, 1981, 196 p.
8. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, part 1, 584 p.
9. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proivedeniy* [Tables of integrals, sums, orders and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

Басинский Константин Юрьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет (Россия, г. Тюмень, ул. Володарского, 6)

Basinskiy Konstantin Yur'evich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical modeling, Tyumen State University (6 Volodarskogo street, Tyumen, Russia)

E-mail: kbasinsky@mail.ru

УДК 532.591
Басинский, К. Ю.
Образование волн на поверхности жидкости при обтекании кругового цилиндра / К. Ю. Басинский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 51–59. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-5